

203-223-226 Théorème de point fixe compact.

Théorème: Soit $(E; d)$ métrique compact.
Soit $f: E \rightarrow E$ telle que
 $\forall x, y \in E$, on a $d(f(x); f(y)) < d(x; y)$

Alors f admet un unique point fixe $a \in E$
Et $\forall x_0 \in E$, la suite itérée $x_{n+1} = f(x_n)$
converge vers a .

Preuve: Unicité du point fixe:

Soit a et b deux points fixes distincts.

$$\text{Alors } d(f(a); f(b)) = d(a; b) < d(a; b)$$

Absurde donc $a = b$.

Existence du point fixe:

$$\text{On pose } \varphi: x \mapsto d(f(x); x)$$

f est continue car lipschitzienne et d est continue.

Donc φ est continue. Donc $\varphi(E)$ est compact

Donc borné. Soit $m = \min(\varphi(E))$

$$\exists a \in E \text{ tq } m = \varphi(a)$$

$$\text{Sq } m > 0$$

Alors $\varphi(f(a)) = d(f(f(a)); f(a)) < \varphi(a)$
C'est absurde donc $m = 0$
Donc $d(f(a); a) = 0 : f(a) = a$

Preuve de la convergence:

$$\text{Soit } (x_n) \in E^{\mathbb{N}} \text{ tq } \begin{cases} x_0 \in E \\ \forall n \in \mathbb{N}; x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

$$\text{On pose } \forall n \in \mathbb{N}; d_n = d(x_n; a) \\ \rightarrow \text{si } \forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq a : \\ d(x_{n+1}; a) = d(f(x_n); f(a)) < d(x_n; a)$$

$$\text{Donc } (d_n) \searrow \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, d_n \geq 0$$

Donc (d_n) converge vers $l \in \mathbb{R}_+$.

$$\text{Sq } l > 0; \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} d_{n+1} = l$$

E compact donc $\exists \varphi \nearrow$ tq $\varphi_n \rightarrow x \in E$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} d(\varphi_n; a) = d(x; a) \text{ (par c)} \\ = l$$

$$\text{Mais } \lim_{n \rightarrow +\infty} d(\varphi_{n+1}; a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f(\varphi_n); a) \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(\varphi_n; a) \\ = l$$

$$\text{Donc } d(f(x); f(a)) = d(x; a)$$

$$\text{Donc } x = a$$

Donc a est l'unique valeur d'adhérence de (x_n)

Donc (x_n) converge vers a .

203-223-226 | Théorème de point fixe compact.

Théorème: Soit $(E; d)$ métrique compact.
Soit $f: E \rightarrow E$ telle que
 $\forall x, y \in E$, on a $d(f(x); f(y)) < d(x; y)$

Alors f admet un unique point fixe $a \in E$
Et $\forall x_0 \in E$, la suite itérée $x_{n+1} = f(x_n)$
converge vers a .

Preuve: Unicité du point fixe:

Soit a et b deux points fixes distincts.

Alors $d(f(a); f(b)) = d(a; b) < d(a; b)$

Absurde donc $a = b$.

Existence du point fixe:

On pose $\varphi: x \mapsto d(f(x); x)$

f est continue car lipschitzienne et d est continue.

Donc φ est continue. Donc $\varphi(E)$ est compact

Donc borné. Soit $m = \min(\varphi(E))$

$\exists a \in E$ tq $m = \varphi(a)$

Sq $m > 0$

Alors $\varphi(f(a)) = d(f(f(a)); f(a)) < \varphi(a) = m$
C'est absurde donc $m = 0$
Donc $d(f(a); a) = 0 : f(a) = a$.

Preuve de la convergence:

Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ tq $\begin{cases} x_0 \in E \\ \forall n \in \mathbb{N}; x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}; d_n = d(x_n; a)$
si $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = a$:
 $d(x_{n+1}; a) = d(f(x_n); f(a)) < d(x_n; a)$

Donc $(d_n) \searrow$ et $\forall n \in \mathbb{N}, d_n \geq 0$

Donc (d_n) converge vers $l \in \mathbb{R}_+$.

Sq $l > 0$; alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_{n+1} = l$

E compact donc $\exists \varphi \rightsquigarrow$ tq $x_{\varphi(n)} \rightarrow x \in E$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_{\varphi(n)}; a) = d(x; a)$ (par c)
 $= l$

Mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_{\varphi(n)+1}; a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f(x_{\varphi(n)}); a)$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f(x); a)$
 $= l$

Donc $d(f(x); f(a)) = d(x; a)$

Donc $x = a$.

Donc a est l'unique valeur d'adhérence de (x_n)

Donc (x_n) converge vers a .